UNIDAD I

I.5.- *MODELAMIENTO EN EDO*

A continuación describiremos algunos modelos simples que pueden ser descritos a través de ecuaciones diferenciales. Acá lo importante no es la "dificultad" en la resolución de los problemas, sino que entender la consistencia entre el modelo y la ecuación, identificando las componentes del modelo con las variables dependientes e independientes de la ecuación, el rol de los parámetros presentes, y así entender qué nos dice la solución respecto de lo que se quiere representar.

1.- Dos modelos en dinámicas de poblaciones.

En los siguientes modelos, vamos a cambiar un poco la notación. En vez de describir como "x" la variable independiente, usaremos "t", y entonces vamos a pensar en este primer ejemplo que:

- t vá a representar el tiempo ($t \geq 0$, y $t = 0$ vá a representar el inicio)
- $y(t)$ vá a representar la densidad de una población dada en el instante de tiempo t. Es natural pensar que $y(t) \geq 0$.
- k será la tasa de natalidad de la población a estudiar. Asumimos que $k > 0$ está fijo, y que mientras más grande el valor numérico de k, la población se reproduce más rápido. Es decir, la tasa de natalidad depende de la naturaleza de los individuos considerados y va variando de especie en especie.

1.1.- Un modelo básico.

El modelo más básico sobre el crecimiento de una población está dado por el problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rll} y' & = ky, & t > 0, \\ y(0) & = y_0, & \end{array}\right. \tag{1}$$

donde asumimos que $y_0 \geq 0$ es la población inicial.

La EDO nos dice que la tasa de crecimiento de la población en estudio (es decir, y') crece proporcional a la cantidad de población (y) presente en el ambiente (con constante de proporcionalidad k).

Un caso extremo, por ejemplo, es cuando $k = 0$. Como k es la tasa de natalidad, se puede entender que dicha población simplemente no se reproduce, y por lo tanto la población será la misma siempre. Esto es compatible con la matemática: si $k = 0$, entonces $y'(t) = 0$ para todo $t > 00$ y entonces $y(t) = C$ para todo $t \geq 0$. Imponiendo la condición inicial, se concluye que $y(t) = y_0$ para todo $t \geq 0$. Por esto descartamos ese caso básico y siempre pensamos que $k > 0$.

Notamos que $y(t) = 0,\ t \geq 0$ es un estado estacionario para la EDO, y entonces al considerar la condición inicial $y_0 = 0$, entonces por el Teorema de Existencia y Unicidad Global la única solución del $p.v.i.$ será la función idénticamente nula. Esto se ajusta razonablemente al modelo, explicando que si inicialmente "no hay nadie", no hay individuos para la reproducción y se permanecerá eternamente de tal forma.

Descartando los casos triviales anteriores, resolvemos (1) usando separación de variables. La solución general de la EDO considerada en (1) es

$$y(t) = Ce^{kt}$$

y aplicando la c.i. se obtiene la solución del problema

$$y(t) = y_0 e^{kt}, \quad t \geq 0.$$

Esta expresión representa la tan famosa frase de "crecimiento exponencial" en una población. Un análisis recurrente en modelos en donde la variable independiente representa al tiempo es el "comportamiento a largo plazo" del sistema, lo que matemáticamente se identifica con el comportamiento asintótico de la solución del *p.v.i.* cuando $t \to +\infty$. En este caso, es claro que la población crece no acotada a largo plazo.

Es evidente que este modelo es bastante básico, pues por ejemplo, no supone una tasa de mortalidad en la población, ni tampoco involucra factores ambientales en el sistema. Con respecto a éste último elemento, presentamos un modelo mucho más elaborado a continuación.

1.2.- Modelo logístico de población.

Además de los elemntos t, y, k descritos en el modelo anterior, acá vamos a agregar el factor ambiental a través del siguente parámetro:

- A es la *capacidad de carga del sistema*. Asumimos que $A > 0$ está fijo y representará la cantidad máxima de individuos que el sistema puede soportar. Podría pensarse, por ejemplo, en una cantidad máxima de alimento que dispone el ambiente para que todos puedan alimentarse, o como el espacio máximo en la que la población puede sobrevivir sin hacinamiento.

El modelo logístico de población está determinado por el pvi

$$\begin{cases} y' &= ky(A-y), \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{2}$$

donde, como antes, $y_0 \geq 0$ representa la denisdad inicial de la población.

Observemos el lado derecho en la EDO. La expresión $ky(A-y)$ esta vez puede cambiar de signo, lo que a su vez determina un cambio de signo en y'. Si $y < A$ (es decir, la población es menor a la capacidad de carga del sistema) se tiene que $y' > 0$ y entonces la población "sigue creciendo" por que el sistema no está colmado. Por otro lado, si $y > A$ la población sobresatura el sistema. Luego $y' < 0$ y en ese caso la población debe decrecer, ya sea por que los individuos no pueden alimentarse (lo que supone mortalidad), o el espacio no es suficiente (lo que supone competencia).

Estudiemos los estados estacionarios: en este caso son dos:

$$y_1(t) = 0, \quad \text{e} \quad y_2(t) = A, \quad t \geq 0.$$

La interpretación de y_1 es similar a la del modelos anterior. Con respecto a y_2, podemos interpretarla como un estado de equilibrio entre la población y el medio, en el que éste es capaz de sostener la población permanentemente, sin que haya reproducción ni mortalidad.

Usando separación de variables, podemos obtener la solución general de la EDO como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(A-y)} = kdx \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(A-y)} = \int kdt \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{A}\Big(\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{A-y} \Big) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{A} \ln(|y|/|A-y|) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{|y(t)|}{|A-y(t)|}=Ce^{Akt}, \quad t\geq 0,\ C\geq 0. \tag{3}$$ sol

Vamos a dividir el análisis en dos casos para despejar y, dependiendo de la condición inicial y evitando los estados estacionarios.

Si $0<y_0<A$, por el **Teorema de Existencia y Unicidad**, la solución del problema no puede "tocar" los estados estacionarios y entonces $0<y(t)<A$ para todo t. Así, sacamos los valores absolutos en (3) para escribir

$$\frac{y}{A-y}=\frac{y_0}{A-y_0}e^{Akt},$$

e impoinendo la condición inicial obtenemos de (3) se tiene que

$$\frac{y_0}{A-y_0}=C.$$

y podemos despejar y para llegar a

$$y(t)=\frac{Ay_0e^{Akt}}{A-y_0+y_0e^{Akt}}. \tag{4}$$

Como $0<y(t)<A$ para todo t, entonces $y'(t)>0$ para todo t y la población siempre crece. ¿ Cuál es el comportamiento asintótico de la población? Es fácil ver que

$$y(t)\to A, \quad \text{cuando } t\to+\infty,$$

es decir, la densidad de población se acerca a la capacidad de carga A en el largo plazo, pero siempre por debajo.

En el caso $y_0>0$, entonces por Teorema de Existencia y Unicidad tendremos que $y(t)>A$ para todo $t\geq 0$ (no puede tocar el estado estacionario A) y entonces (3) esta vez queda

$$\frac{y}{y-A}=Ce^{Akt},$$

e imponiendo la condición inicial, concluimos que

$$C=\frac{y_0}{y_0-A}.$$

Luego, despejando y obtenemos la misma expresión anterior

$$y(t)=\frac{Ay_0e^{Akt}}{A-y_0+y_0e^{Akt}},$$

que es la misma expresión que antes. En este caso, el comportamiento asintótico de la población a largo plazo es la capacidad de carga A tal como se puede apreciar tomando límite cuando $t\to+\infty$ en la última expresión. Sin embargo, en este caso $y'(t)<0$ para todo t, por lo que la población siempre se mantiene sobre A, pero disminuyendo.